Liebe Schülerinnen und Schüler der Fachoberschule Gesundheit und Pflege,

auf den folgenden Seiten möchte ich Ihnen die Möglichkeit geben Ihr Wissen aus den allgemeinbildenden Schulen aufzufrischen. Dieses Wissen ist Voraussetzung für eine aktive Teilnahme am Mathematikunterricht.

Die Inhalte entsprechen denen der Klasse 5 bis 10.

Die einzelnen Kapitel beginnen zunächst mit einer kurzen Erläuterung der Inhalte. Daher kann dieses Papier Ihnen auch später als Nachschlagewerk dienen. Der Erläuterung folgt meist eine Beispielaufgabe zu jedem Aufgabentyp. Damit Sie ihr Können überprüfen können, folgen häufig einige Übungsaufgaben, die sie lösen sollen. Die Lösungen finden Sie am Ende dieses Papiers, sodass sie selbstständig Ihre Rechnungen überprüfen können.

Wenn Sie Schwierigkeiten mit den Aufgaben haben, wenden Sie sich gerne an mich. Wir können dann gemeinsam überlegen, wie wir die Probleme überwinden können.

Ich wünsche Ihnen viele Erfolgserlebnisse.

Maike Mecklenburg

Inhaltsverzeichnis

1 Aufbau des Zahlensystems

Das in meinem Unterricht verwendete Zahlensystem ist Ihnen in Teilen schon seit der Grundschule bekannt.

Wir benötigen die dabei verwendeten Symbole, wenn wir die Funktionen im Unterricht behandeln. Dabei ist es von hoher Bedeutung, dass Sie die Symbole erkennen und bestimmte Zahlen den Zahlenmengen zuordnen können.

1.1 *Die natürlichen Zahlen*

Die natürlichen Zahlen haben Sie wahrscheinlich schon als Kleinkind gelernt. Hiermit begannen Sie viele verschiedene Dinge zu zählen.

In der Mathematik wird diese Zahlenmenge mit $\mathbb{N}^*$ abgekürzt.
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ *(gesprochen: N Sternchen gleich der Menge mit den Elementen 1,2, 3, ...)*

1.2 *Die natürlichen Zahlen einschließlich Null*

Die Zahlenmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}^*$ enthält nicht die Zahl 0. Diese wird in der Zahlenmenge der natürlichen Zahlen einschließlich Null ergänzt.

In der Mathematik wird diese Zahlenmenge mit $\mathbb{N}$ abgekürzt.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ *(gesprochen: N gleich der Menge mit den Elementen 0, 1, 2, 3, ...)*

1.3 *Die ganzen Zahlen*

Die ganzen Zahlen sind Ihnen seit der Grundschule vertraut. Im Mathematikunterricht wurden die natürlichen Zahlen einschließlich Null durch negative (ganze) Zahlen ergänzt.

In der Mathematik wird diese Zahlenmenge mit $\mathbb{Z}$ abgekürzt.
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ *(gesprochen: Z gleich der Menge mit den Elementen -2, -1, 0, 1, 2, ...)*

1.4 *Die rationalen Zahlen*

Die Zahlenmenge der rationalen Zahlen erweitert die Menge der ganzen Zahlen. Sie haben sie bereits nach der Grundschule kennen gelernt. Der Menge der ganzen Zahlen werden durch echte Brüche z. B. $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{4}$ ergänzt.
In der Mathematik wird diese Zahlenmenge mit $\mathbb{Q}$ abgekürzt.

1.5 *Die reellen Zahlen*

Dieses ist die letzte Zahlenmenge, die wir im Mathematikunterricht benötigen. Diese Zahlenmenge enthält alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl, auch die, die nicht als Bruch dargestellt werden können. Die bekannteste irrationale Zahl, die sie kennen ist π gefolgt von $\sqrt{2}$.

In der Mathematik wird diese Zahlenmenge mit $\mathbb{R}$ abgekürzt.

Zusammenfassung:

<table>
<tr><td>Natürliche Zahlen ohne Null
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$</td><td>Null
0</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Natürliche Zahlen einschließlich Null
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$</td><td>negative ganze Zahlen
$\{ ..., -2, -1\}$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Ganzen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$</td><td>echte Bruchzahlen
z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Rationale Zahlen
$\mathbb{Q} = \{..., \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, ..., 0, ... \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, ...\}$</td><td>Irrationale Zahlen alle unendlichen nicht periodischen Zahlen, z. B.
$\sqrt{2}$, π</td></tr>
<tr><td colspan="5">Reelle Zahlen
$\mathbb{R}$</td></tr>
</table>

Jetzt sind Sie dran. Immer wenn das Bild des Stiftes zu sehen ist, kommen Übungen für Sie zur Kontrolle. Bitte betrügen Sie sich nicht selber, indem Sie die Lösungen nach schauen, während Sie die Aufgaben bearbeiten.

<u>Aufgabe 1:</u>

Ordnen Sie die folgenden Zahlen einer Zahlenmenge zu, die diese und keine weiteren Zahlen beinhaltet[1]

a) 5, 2, -1, 2, 3

b) 7, $\frac{1}{2}$, 5, 12

c) 12, 100, 3

d) 0, 5, 7, 12

e) 7, π , -7

1 Sie können immer die Zahlenmenge der reellen Zahlen wählen. Dieses wäre zwar richtig, aber würde den Zweck der Übung nicht erfüllen.

2 Allgemeines

2.1 Rechenregeln

In der Mathematik gibt es drei grundlegende Rechenregeln, die immer beachtet werden müsse. Werden diese beachtet, so kommt es kaum noch zu Fehlern.

Hinweis: Einige Taschenrechner beherrschen diese Rechenregeln nicht. Beachten Sie daher Ihre Eingabe. Sie müssen eventuell entsprechende Klammern setzen.

1. Es gilt als Erstes die sogenannte Punkt-vor-Strichrechnung. Das bedeutet, dass immer erst multipliziert (mal nehmen) und dann dividiert (teilen) bevor addiert (plus) oder subtrahiert (minus) wird.
2. Eine ähnliche Regel gibt es bei der Potenzrechnung. Es wird erst potenziert und dann Folgenden die weiteren Rechenarten.
3. Klammern (eckige und runde) heben diese Rechenregeln auf und verlangen, dass zunächst alles in der Klammer ausgerechnet wird.

<u>Beispiele:</u>

$5^3+7\cdot 2=125+14=139$	Erst potenzieren, dann multiplizieren, dann addieren.
$(5^3+7)\cdot 2=132\cdot 2=264$	Erst potenzieren, dann die Klammer ausrechnen, dann multiplizieren.

<u>Aufgabe 2:</u>

Lösen Sie die folgenden Aufgaben.

a) 7^2+5

b) $7+5\cdot 3$

c) $(5+1)\cdot 2$

d) $(7+6)\cdot 2^2$

e) $(5\cdot(8-3))-6$

2.2 Bruchrechnung

Die Bruchrechnung fällt den meisten schwer und es unterlaufen viele Fehler. Wir benötigen die Bruchrechnung bei den Funktionen und der Stochastik, die Themengebiete, die wir in diesem Schuljahr behandeln werden.

Auch hier gibt es wieder Regeln, die beachtet werden müssen:

1. Bei der Addition und Subtraktion müssen zunächst die beiden Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden.

2. Bei der Multiplikation werden die Zähler und Nenner der beiden (oder mehreren) Brüche miteinander multipliziert. Es muss zuvor nicht der gleiche Nenner gefunden werden.

3. Bei der Division gilt: „Brüche werden dividiert indem man mit dem Kehrwert multipliziert".

Beispiele:

$\frac{5}{2}+\frac{7}{3}=\frac{15}{6}+\frac{14}{6}=\frac{(15+14)}{6}=\frac{29}{6}=4\frac{5}{6}$ Erst müssen die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden. Dieses geht am einfachsten, indem man beide Nenner miteinander multipliziert. Dabei ist zu beachten, dass auch die Zähler verändert werden müssen, da sonst der Wert des Bruchs verändert wird. Anschließend können die Zähler miteinander addiert werden. (Hinweis: Die Klammer auf dem Bruchstrich könnte hier weggelassen werden).

$\frac{7}{8}\cdot(\frac{3}{4})=\frac{21}{32}$ Sowohl Zähler als auch Nenner wurden miteinander multipliziert.

$\frac{(\frac{7}{8})}{(\frac{3}{4})}=\frac{7}{8}\cdot(\frac{4}{3})=\frac{28}{24}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$ Es wird der Kehrwert des Nenners gebildet und mit dem Zähler multipliziert. Bei dieser Aufgabe konnte anschließend noch zweimal mit 2 gekürzt werden.

Aufgabe 3:

Lösen Sie die folgenden Aufgaben und kürzen Sie die Brüche, wenn dieses möglich ist:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

b) $\frac{8}{5}-\frac{3}{2}$

c) $\frac{9}{2}+\frac{7}{8}$

d) $\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{11}$

e) $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{9}$

f) $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{6}}$

g) $\frac{9}{8}-\frac{\frac{7}{10}}{\frac{3}{4}}$

2.3 Gleichungen

Gleichungen kommen in vielen Bereichen der Mathematik vor. Zukünftig werden wir verschiedene Themengebiete erarbeiten, bei denen der Umgang mit Gleichungen Voraussetzung ist. Von daher hat es eine große Bedeutung, dass Sie Gleichungen sicher umstellen können.

Gleichungen kann man sich bildlich sehr gut als Waage vorstellen. Dabei ist diese nur ausgeglichen (gleich), wenn auf beiden Seiten das gleiche Gewicht liegt. Wird auf eine Seite etwas dazu gelegt, so kommt die Waage ins Ungleichgewicht. Dieses kann dadurch ausgeglichen werden, dass man das Dazugelegte wegnimmt oder auf die andere Seite der Waage das gleiche Gewicht in die Waagschale legt. Genau dieses gilt auch für die mathematische Gleichung. Was man auf der einen Seite macht, muss auch auf der anderen Seite gemacht werden.

<u>Beispiel:</u>

Stellen Sie die Gleichung um, sodass diese gleich 0 ist.

$5^2+7x=9x^2+25x-9$		Ich rechne zunächst alles aus, was möglich ist und fasse gegebenenfalls zusammen.
$25+7x=9x^2+25x-9$	|-25	Ich möchte „alle Zahlen auf eine Seite bringen“. Die jetzige linke Seite soll 0 werden, da dort nur zwei Glieder sind und ich mir so ein paar Rechenschritte sparen kann. Da ich auf der linken Seite 25 abziehe, muss ich dieses auch auf der rechten Seite der Gleichung tun.
$25-25+7x=9x^2+25x-9-25$		Diesen Zwischenschritt brauchen sie nicht ausführen, jedoch verdeutlicht er hier mein Vorgehen.
$7x=9x^2+25x-34$	|-7x	In einem weiteren Schritt kann nun das letzte Glied dieses Terms auf die andere Seite gebracht werden.
$7x-7x=9x^2+25x-7x-34$		Dieses ist ebenfalls nur ein Zwischenschritt.
$0=9x^2+18x-34$		Die Umstellung der Gleichung nach 0 ist hiermit beendet.

Würde ich versuchen die rechte Seite 0 zu bekommen und alles auf die linke Seite „zu bringen“, dann hätte ich folgendes Ergebnis: $-9x^2-18x+34=0$. Hier kann man sehen, dass das Ergebnis ein anderes ist. Sie werden sich vielleicht fragen, ob das richtig sein kann oder ob ich mich hier verrechnet habe. Das Ergebnis ist richtig. Wenn wir die Gleichung mit -1 multiplizieren würden, dann kämen wir auf folgenden Rechenweg:

$-9x^2-18x+34=0 \quad | \ (-1)$

$+9x^2+18x-34=-0$

$9x^2+18x-34=0$

Sie sehen, dass wir nun das gleiche Ergebnis erhalten. Beide Rechenwege haben dazu geführt, dass der Term gleich Null ist.

Aufgabe 4:

Stellen Sie die Gleichungen nach 0 um.

a) $5x^2-7=3x^2-12x+5$

b) $5x^2-3x+15x^2-17=12x^2+9x-45$

c) $7x^3+5x^2-9x^2+46=4x^2+5x-1$

2.4. Binomische Formeln

Die binomischen Formeln benötigen wir später bei den quadratischen Funktionen.

Die binomischen Formeln dienen dazu Klammern einfacher auszumultiplizieren bzw. schneller zusammenzufassen. Die binomischen Formeln sind als Hilfsmittel zu betrachten. Sollten Sie diese nicht auswendig lernen, so können sie unter Beachtung der Rechenregeln zu den gleichen Ergebnissen kommen.

Es gibt drei binomische Formeln:

I. $(a+b)^2=a^2+2\mathrm{ab}+b^2$

II. $(a-b)^2=a^2-2\mathrm{ab}+b^2$

III. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Die folgenden Erläuterungen können Sie überspringen, wenn Sie mit den binomischen Formeln vertraut sind.

Ich möchte an der ersten binomischen Formel einmal den Rechenweg aufzeigen:

$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)$	Das hoch zwei bedeutet, dass die Klammer mit sich selber multipliziert wird.
$(a+b)\cdot(a+b)$	Jetzt muss jedes Element aus der ersten Klammer mit jedem Element aus der zweiten Klammer miteinander multipliziert werden.
$(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2$	Ich habe zunächst $a\cdot a$ gerechnet, so erhalte ich das Ergebnis a^2. Anschließend wird $a\cdot b$ gerechnet, was ich auch als ab schreiben kann. $b\cdot a$ entspricht ba und als letztes wird $b\cdot b$ gerechnet und ich erhalte b^2.
$a^2+ab+ba+b^2=a^2+ab+ab+b^2$	Bei der Ausmultiplikation im vorherigen Schritt haben wir die ab und ba als Ergebnis erhalten. Diese schreiben wir nun einheitlich als ab. Dieses ist möglich, da es bei der Multiplikation egal ist, in welcher Reihenfolge sie geschrieben werden. (Es ist egal ob man $2\cdot 3$ rechnet oder $3\cdot 2$ und damit ist es auch egal ob ich $a\cdot b$ oder $b\cdot a$ rechne)
$a^2+ab+ab+b^2=a^2+2\mathrm{ab}+b^2$	In einem letzten Schritt kann die Gleichung noch zusammengefasst werden. Ich habe zunächst $ab+ab$ dort stehen gehabt. Dieses kann ich als $2\cdot ab$ bzw. $2\mathrm{ab}$ zusammenfassen. (Hier ein paar kurze Zahlenbeispiele, die diesen letzten Schritt verdeutlichen sollen: $3+3=2\cdot 3$ oder $5+5+5=3\cdot 5$)

Aufgabe 5:

Ordnen Sie den folgenden Termen zu, um welche binomische Formel es sich hier handelt. Sie brauchen diese <u>nicht</u> ausmultiplizieren!

a) $(5+2)^2$

b) $(7-1)^2$

c) $(6+3)(6-3)$

d) $(7-1)(7+1)$

e) $(3+1)^2$

f) $(5-9)^2$

Bisher haben wir uns die „linke“ Seite der binomischen Formel angeschaut. Die folgenden Aufgaben werden schwerer, da sie nun die „rechte“ Seite den binomischen Formel zuordnen sollen.

g) $9+12+4$

h) $16-36$

i) $25-20+4$

j) $81-49$

k) $25-90+81$

l) $4+32+64$

2.4.1. Ausmultiplizieren

Zunächst möchte ich damit beginnen verschiedene Klammern, die quadriert werden, auszumultiplizieren und so die Anwendung der binomischen Formeln zu verdeutlichen.

Beispiel:

$(5y+3x)^2$	Dieses entspricht der ersten binomischen Formel. Ich erkenne dieses daran, dass nur eine Klammer da ist (die dritte binomische Formel kann ich damit ausschließen) und ein + zwischen den beiden Zahlen in der Klammer steht (somit kann auch die zweite binomische Formel ausgeschlossen werden)
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	Dies ist die erste binomische Formel. In unserem Fall bedeutet es, dass $a=5y$ und $b=3x$ ist.
$5^2\cdot y^2+2\cdot 5y\cdot 3x+3^2\cdot x^2$	Ich habe hier die Zahlen anstelle der Buchstaben geschrieben.
$25y^2+30xy+9x^2$	In einem letzten Schritt habe ich alles ausmultipliziert. Dieses ist das gesuchte Ergebnis.

Aufgabe 6:

Lösen Sie die folgenden Klammern auf und fassen sie gegebenenfalls zusammen. Nutzen Sie hierfür die binomischen Formeln.

a) $(2x+5y)^2$

b) $(7m+3n)^2$

c) $(9a-7b)^2$

d) $(5h+3i)(5h-3i)$

e) $(2k-4r)^2$

f) $(1a+7b)(1a-7b)$

2.4.2. Zusammenfassen

Die Aufgabenstellung kann jedoch auch andersherum sein und es muss zu einer binomischen Formel zusammengefasst werden. Dieses ist dann von Bedeutung, wenn die Wurzel gezogen werden soll.

Beispiel:

$25y^2+30xy+9x^2$	Die erste Gleichung ist gegeben. Es handelt sich um die erste binomische Formel.
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$	Jetzt müssen wir a bzw. b bestimmen. Wir können folgendes festhalten: $a^2=25y^2$, $2ab=30xy$ und $b^2=9x^2$. Damit wir auf a bzw. b kommen müssen wir aus a^2 und b^2 die Wurzel ziehen.
$(\sqrt{25y^2}+\sqrt{9x^2})^2$	Ich habe nun die Wurzel aus a^2 und b^2 in die binomische Formel eingesetzt.
$(5y+3x)^2$	In einem letzten Schritt wird alles ausgerechnet, sodass ich auf das Ergebnis komme.

Aufgabe 7:

Fassen Sie die folgenden Terme mithilfe der binomischen Formeln zusammen.

a) $49a^2+42ab+9b^2$

b) $16x^2-4y^2$

c) $1u^2+10uv+25v^2$

d) $36m^2-96mn+64n^2$

e) $81f^2-100g^2$

f) $144h^2-48hi+4i^2$

3 Funktionen

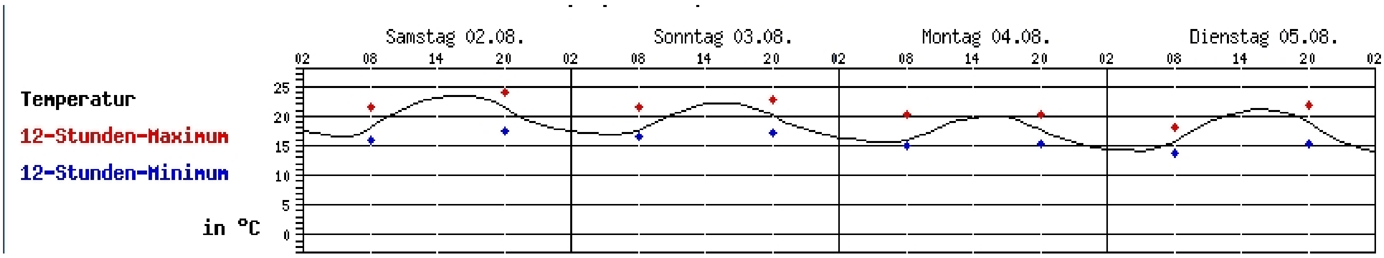
Funktionen sind eindeutige Zuordnungen. Das bedeutet das einer Zahl (x-Wert) des Definitionsbereiches genau eine Zahl (y-Wert) des Wertebereiches zugeordnet ist. Diese Erklärung ist wahrscheinlich sehr abstrakt und daher möchte ich es an einigen Beispielen aus ihrer Lebenswelt erläutern.

Hinweis: Zum Themenbereich Funktionen habe ich keine Übungsaufgaben erstellt, da wir diesen Bereich noch im Unterricht besprechen. Möchten Sie Übungsaufgaben hierzu vorab lösen, so nutzen Sie bitte Ihr Schulbuch. Selbstverständlich bin ich gerne bereit die von Ihnen gerechneten Aufgaben zu kontrollieren.

Beispiele:

Es findet eine eindeutige Zuordnung zwischen der Anzahl von Eiskugeln (x-Wert) und dem Preis (y-Wert), den Sie dafür zahlen müssen, statt. Hier können wir sehen, dass es eine unabhängige Variable gibt, die wir frei wählen können (hier sind es die Anzahl der Eiskugeln), und die abhängigen Variablen, die hier dem Preis entspricht, da dieser von der Anzahl der Eiskugeln abhängt. Die unabhängige Variable ist immer der x-Wert. Die abhängige Variable ist immer der y-Wert.

Es findet eine eindeutige Zuordnung zwischen einem Datum/Uhrzeit (x-Wert) und der Tageshöchsttemperatur (y-Wert) statt. Bei diesem Beispiel können wir auch sehen, dass jedem Datum/Uhrzeit nur eine Temperatur zugeordnet ist, während einer Temperatur (z. B. 20°C) auch mehrere Tage/Uhrzeiten zugeordnet werden dürfen.



3.1. Grundlagen

Bevor ich mit der Erläuterung der linearen und quadratischen Funktionen beginnen werde, müssen wir noch einige Grundlagen kennen lernen. Zunächst möchte ich mit den Darstellungsmöglichkeiten beginnen. Diese beziehen sich auf alle Funktionsklassen (sowohl lineare als auch quadratische Funktionen).

3.1.1. Darstellungsmöglichkeiten

Eine Funktion kann unterschiedlich dargestellt werden. Die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten, die ich im Folgenden erläutern werde, haben unterschiedliche Vor- und Nachteile.

Die Tabelle (tabellarische Darstellung)

Die Tabelle wird zum einen mit der unabhängigen Variablen (x) und mit der abhängigen Variablen (y) beschriftet.

Beispiel:

Menge [in Kugeln Eis]	Gesamtpreis [in €]
1	0,70
2	1,40
3	2,10
4	2,80
5	3,50

Eine Tabelle ist auch quer möglich.

Beispiel:

Menge [in Kugeln Eis]	1	2	3	4	5
Gesamtpreis [in €]	0,70	1,40	2,10	2,80	3,50

Die Vorteile der Tabelle:

- übersichtlich
- Werte können schnell abgelesen werden

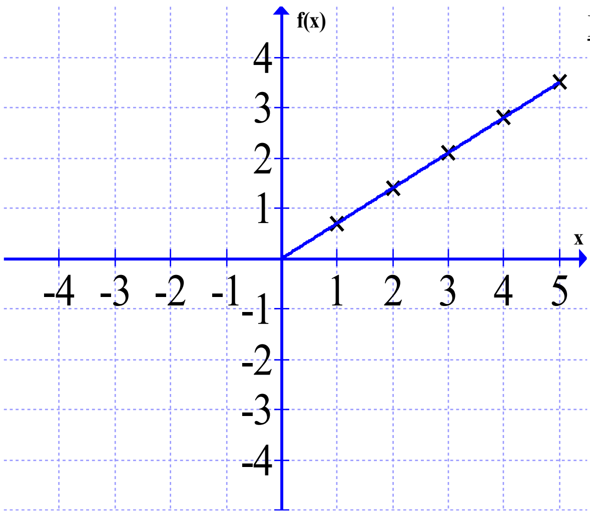
Die Nachteile der Tabelle:

- nicht alle Möglichkeiten können dargestellt werden (z. B. 10 Kugeln Eis)

<u>Die Grafik</u> (grafische Darstellung)

Die grafische Darstellung bedeutet, dass die Werte in einem Koordinatensystem dargestellt werden.

Das Koordinatensystem:



<u>Die Achsen:</u> Die x-Achse wird auch *Abszissenachse* genannt und verläuft horizontal. Auf ihr wird die unabhängige Variable x abgetragen.

f(x)-Achse wird auch y-Achse oder *Ordinatenachse* genannt. Die Achse verläuft vertikal. Die Bezeichnung y-Achse ist Ihnen wahrscheinlich vertrauter. Ich werde jedoch in meinem Unterricht die Bezeichnung f(x) vorwiegend benutzen, da hier deutlich wird, dass der y-Wert vom x-Wert abhängt. Also der Funktionswert (dieser Begriff wird bei der Darstellungs-möglichkeit „Die Funktionsgleichung“ genauer erläutert)von der unabhängigen Variable.

<u>Die Quadranten:</u> Das Koordinatensystem wird in vier *Quadranten* eingeteilt. Das sind die Flächen zwischen den Achsen. Die Fläche rechts oben ist der erste Quadrant, links daneben ist der zweite Quadrant. Unterhalb des zweiten Quadranten ist der dritte Quadrant zu finden und der vierte Quadrant ist rechts unten im Koordinatensystem dargestellt.

<u>Der Ursprung:</u> Als *Ursprung* wird der Punkt bezeichnet bei dem sich die Ordinaten- und Abszissenachse schneiden. Er hat die Koordinaten (0/0)

<u>Weiterhin zu beachten:</u> Es ist weiterhin zu beachten, dass am Ende der Achsen ein kleiner Pfeil eingezeichnet wird. Das bedeutet, dass sich die Achsen weiter fortsetzen, auch wenn sie nicht weiter gezeichnet sind.

Bei der Beschriftung der Achsen mit Zahlen ist darauf zu achten, dass der gleiche Abstand auch den gleichen zahlenmäßigen Unterschied ausmacht. Das heißt für Sie: Ein Kästchen ist immer eine Einheit oder zwei Kästchen sind immer 10 Einheiten, je nach Maßstab.

Die <u>Vorteile</u> der grafischen Darstellung:

- Die Darstellungsform ist anschaulich.
- Es können Zwischenwerte abgelesen werden.

Die <u>Nachteile</u> der grafischen Darstellung:

- Es ist eine ungenau (insbesondere bei Handzeichnungen) Darstellungsform.

Die Funktionsgleichung

Die Funktionsgleichung ist die abstrakteste Darstellung und kommt eher selten in Ihrem Alltag vor. Sie ist jedoch im Mathematikunterricht die am häufigsten genutzte Darstellungsform. Bei der Funktionsgleichung lernen Sie nun einige Fachbegriffe kennen.

$$\underbrace{f(x)=2x+5}_{\textit{Funktionsgleichung}} \qquad \underbrace{f(x)}_{\textit{Funktionswert}} = \underbrace{-1{,}4x+9}_{\textit{Funktionsterm}}$$

Funktionsgleichung

Funktionswert
gesprochen:
f von x

Funktionsterm

Die <u>Vorteile</u> der Funktionsgleichung:

- Es können alle Zwischenwerte berechnet werden.
- Es können Schnittpunkte, Nullstellen usw. berechnet werden.

Die <u>Nachteile</u> der Funktionsgleichung:

- Es ist eine ungewohnte Darstellungsform.
- Es ist eine abstrakte Darstellungsform.

Zusammenhänge zwischen den drei Darstellungsformen:

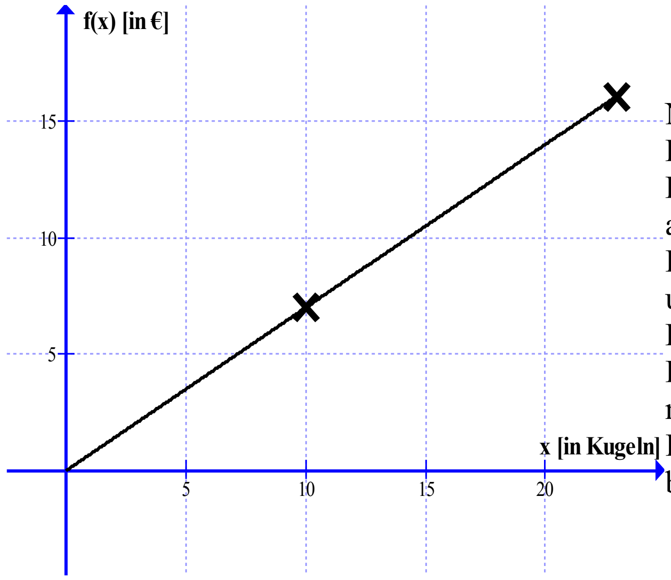
Mithilfe der Funktionsgleichung kann bei einem gegebenen x (unabhängige Variable) der Funktionswert berechnet werden und daraus eine Tabelle erstellt werden.

Beispiel:
Eine Kugel Eis kostet 0,70 €. Wie viel Euro kosten 10 bzw. 23 Kugeln Eis?

1. Aufstellen der allgemeinen Funktionsgleichung: f(x)=0,7x
2. Einsetzen der ersten unabhängigen Variable in die Funktionsgleichung: $f(10)=0{,}7\cdot 10=7$
3. Einsetzen der zweiten unabhängigen Variable in die Funktionsgleichung: $f(23)=0{,}7\cdot 23=16{,}10$
4. Interpretation der errechneten Zahlen: 10 Kugeln Eis kosten 7,00 € und 23 Kugeln Eis kosten 16,10 €.
5. Tabelle anfertigen:

x	10	23
f(x)	7,00	16,10

Wenn wir eine Tabelle gegeben bzw. erstellt haben, kann eine Grafik angefertigt werden. Bei diesem Beispiel haben wir zwei Punkte gegeben $P_1(10/7)$ und $P_2(23/16{,}10)$. Für einen Punkt im Koordinatensystem benötigen wir immer einen x- und einen y-Wert. Ein Punkt wird üblicherweise mit P abgekürzt und dahinter stehen die beiden Werte in Klammern. Zunächst der x- und dann der y-Wert: $P(x/y)$.



Nun wollen wir unsere beiden gegebenen Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnen. Für den ersten Punkt gehen wir vom Ursprung aus 10 Einheiten nach rechts und anschließend 7 Einheiten nach oben und machen dort ein Kreuz um den Punkt zu markieren.
Beim zweiten Punkt gehen wir zunächst 23 Einheiten nach rechts und dann 16,1 Einheiten nach oben.
In einem letzten Schritt können nun noch die beiden Punkte miteinander verbunden werden.

3.2. lineare Funktionen

Der Begriff **linear** leitet sich von lateinisch `linea` = "Leine, Schnur, Faden" ab. Der Graph einer solchen Funktion ist wie mit einer "gespannten Leine" gezeichnet, es ist also eine Gerade.

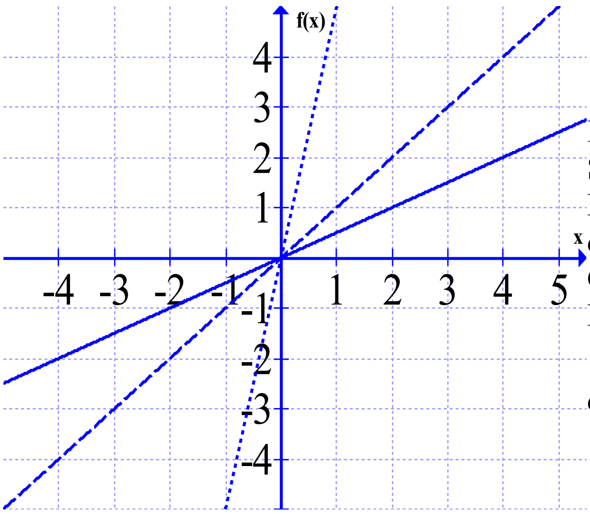
Nun wissen wir wie der Graph einer linearen Funktionsgleichung aussieht, aber wie sieht die Funktionsgleichung aus? Ich habe Ihnen bereits lineare Funktionen aufgezeigt. Die Funktion, die den Gesamtpreis von Eis in Abhängigkeit von der Anzahl der gekauften Kugeln darstellt, ist eine lineare Funktion.

Eine lineare Funktion wird allgemein als $f(x)=mx+b$ beschrieben. Welche bedeutung das m und das b haben können Sie in den folgenden Unterkapiteln nachlesen.

3.2.1. Die Steigung m

Komme ich noch mal auf den Kauf von Eis zurück. Wenn eine Kugel Eis 0,70 € kostet, kann ich den Gesamtpreis berechnen indem ich $0{,}70 \cdot Kugeln$ rechne. Als Funktion kann ich es wie folgt aufschreiben:
$f(x)=0{,}7x$. In allgemeiner Schreibweise habe wir nun eine lineare Funktion, die nur aus einem linearen Glied $(0{,}7x)$ besteht.

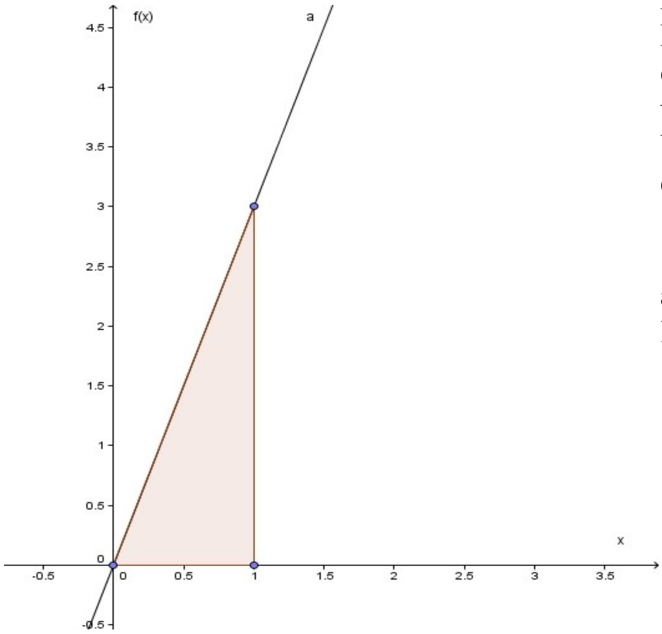
m wird auch als Steigung beschrieben, da die Dezimalzahl vor dem x bestimmt wie steil der Graph der Funktionsgleichung verläuft. Je größer die Zahl, desto steiler verläuft auch der Graph:



In dem links abgebildeten Koordinatensystem können Sie drei Graphen von Funktionsgleichungen sehen. Die durchgezogene Linie, die am flachsten verläuft hat die Funktionsgleichung $f(x)=0{,}5x.$ Der nächste Graph mit der gestrichelten Linie - - - - hat die Funktionsgleichung $f(x)=1x$ oder auch $f(x)=x$. Der am steilsten verlaufende Graph hat die Funktionsgleichung $f(x)=5x$.

Falls die Funktionsgleichung nicht gegeben ist, können wir auch die Steigung mithilfe eines *Steigungsdreieck*es aus der Grafik ablesen. Dazu zeichnet man ein Dreieck ein und trägt die Unterschiede in folgende Gleichung ein $m=\frac{Höhenunterschied}{(horizontal\ Unterschied)}$.

Beispiel:



Das Bild zeigt ein Steigungsdreieck. Es ist eine Einheit „breit“ und drei Einheiten „hoch". Also entspricht der Höhenunterschied drei Einheiten und der horizontal Unterschied eine Einheit. Wenn ich das in die obere Formel einsetze, erhalte ich folgendes Ergebnis:

$m=\frac{3}{1}=3$. Die Steigung des links abgebildeten Graphen beträgt also 3 und somit lautet die Funktionsgleichung:

$f(x)=3x$

Zeichnen Sie Steigungsdreiecke für die Grafen auf der vorherigen Seite ein. Prüfen Sie, ob ich die Steigung richtig angegeben habe.

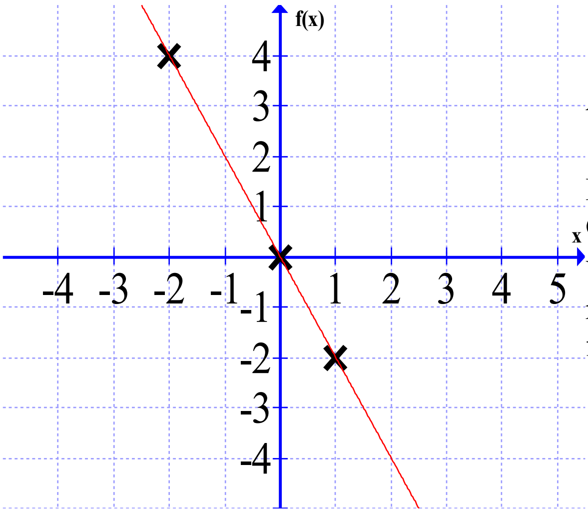
Hinweis: Es gibt hier keine Lösung im Lösungsteil, da die Steigung m bereits auf der vorherigen Seite gegeben ist.

Wie sieht jedoch der Graph einer Funktionsgleichung aus bei der m negativ ist?

Probieren wir es aus:

$m=-2$ und somit lautet die Funktionsgleichung $f(x)=-2x$.
Mit der gegebenen Funktionsgleichung können wir nun eine Tabelle aufstellen. Dafür können wir verschiedene x-Werte beliebig wählen. Es empfiehlt sich jedoch Werte zu nehmen, die nicht zu weit auseinander liegen, da sie sich sonst schlecht zeichnen lassen. Ich wähle folgende Werte: $x_1=-2$, $x_2=0$ und $x_3=1$. (Es hätten auch zwei x-Werte gereicht, um einen genauen Graphen einer linearen Funktion zu zeichnen. Wenn von Hand gezeichnet wird, sollten mehr Punkte eingezeichnet werden, da dann die Grafik genauer wird.)

x	-2	0	1
$f(x)=-2x$	$f(-2)=-2\cdot-2=4$	$f(0)=-2\cdot 0=0$	$f(1)=-2\cdot 1=-2$



Anschließend können die drei Punkte $P_1(-2/4)$, $P_2(0/0)$ und $P_3(1/-2)$ in das Koordinatensystem eingetragen werden und mit einer Geraden verbunden werden.

Wir sehen nun, dass die Gerade von links oben nach rechts unten verläuft. Die Gerade verläuft damit fallend.

3.2.2. Das Absolutglied b

Bisher verliefen die Geraden immer durch den Ursprung. Fügen wir unserer linearen Funktion, so wie wir sie bis jetzt kennen gelernt haben, ein absolutes Glied hinzu, so verschiebt sich die gerade entsprechend nach oben (bei positiven Zahlen) oder nach unten (bei negativen Zahlen).

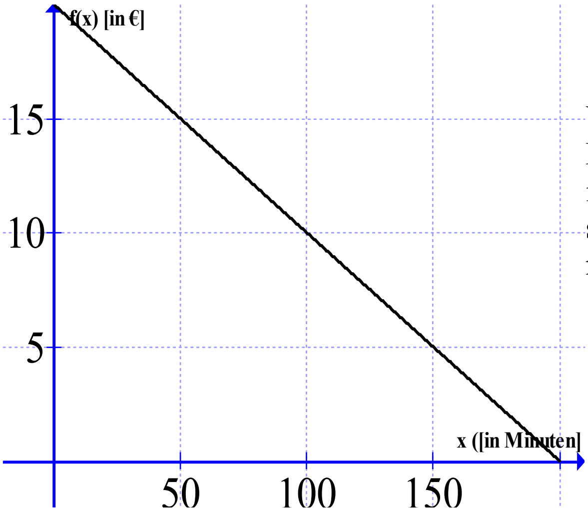
Beispiel:

Auf Ihrem Prepaid-Handy haben Sie ein Guthaben von 20,00 €. Für Minute Gespräch zahlen Sie 0,10 €. Wenn Sie also 5 Minuten telefonieren, haben Sie noch ein Guthaben in Höhe von $20-5\cdot 0{,}1=19{,}50$. Ersetzen wir nun die Minuten durch x erhalten wir: $20-x\cdot 0{,}1$. Wenn wir dieses noch umsortieren, können wir folgende Funktionsgleichung der Berechnung zugrunde legen: $f(x)=-0{,}10\,x+20$.

Stellen Sie eine Wertetabelle für die oben angegebene Funktionsgleichung auf.

Hinweis: Zu dieser Übung gibt es keine Lösung, da ich unendlich viele Werte berechnen müsste, da ihnen die Wahl der x-Werte überlassen ist.

Der Graph der Funktionsgleichung sieht wie folgt aus:

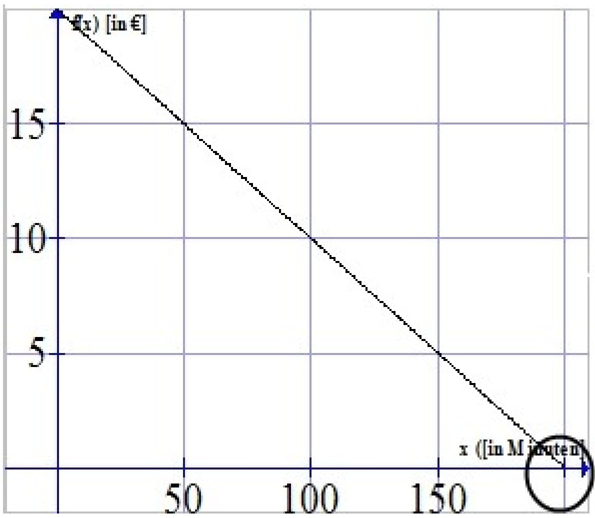


Wie erwartet verläuft der Graph der Funktionsgleichung fallend, da m mit -0,1 negativ ist. Der Graph ist jedoch nach oben verschoben, sodass dieser die Ordinatenachse (y-Achse) nicht mehr bei 0 schneidet sondern bei 20.

Das Absolutglied b (hier 20) gibt den Schnittpunkt mit der Ordinatenachse (y-Achse) an und kann direkt aus der Funktionsgleichung abgelesen werden.

3.2.3. Nullstellen berechnen

Als *Nullstelle* wird der Schnittpunkt des Graphen mit der Abszissenachse (x-Achse) bezeichnet.



Bei der Grafik aus dem vorherigen Abschnitt ist die Nullstelle unten rechts (umkreist) zu finden. Die Nullstelle hat die Koordinaten $N(200/0)$. Bei einer Nullstelle ist immer der f(x)-Wert 0. Dieses liegt daran, dass bei einem Schnittpunkt der Abszissenachse keine Einheit nach oben bzw. unten gegangen werden darf, da es sonst nicht die Nullstelle wäre.

Halten wir also fest $f(x)=0$.

Damit hätten wir auch die wichtigste Erkenntnis zu den Nullstellen bereits erarbeitet.

Beispiel:

Klaus hat ein Guthaben von 20,00 € auf seinem Prepaid-Handy. Eine Minute telefonieren kostet ihn 0,10 €. Wie lange kann er noch telefonieren, bis er sein gesamtes Guthaben aufgebraucht hat (Guthaben 0,00 €).

Die Funktionsgleichung zur Berechnung des Guthabens ist uns schon bekannt:
$f(x) = -0{,}1x + 20$.

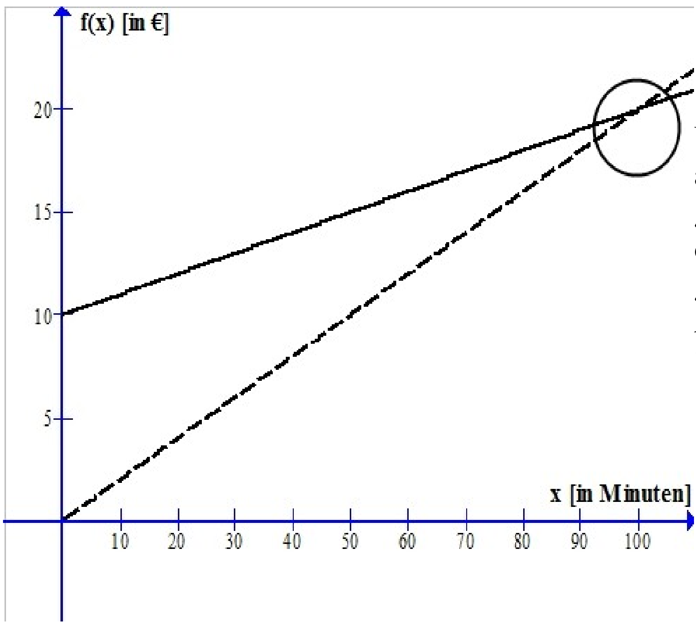
Wir möchten nun wissen, wann dieses Guthaben gleich 0,00 € ist.

$0 = -0{,}1x + 20$		Im folgenden müssen wir nun die Gleichung auflösen.
$0 = -0{,}1x + 20$	|*-10 oder :-0,1	Dadurch erreiche ich, dass ich 1x erhalte. (wichtig: jedes Glied muss mit der Zahl multipliziert bzw. dividiert werden!)
$0 = x - 200$	|+200	Mit der Addition schaffe ich es, dass das x alleine auf einer Seite der Gleichung steht.
$200 = x$		Wir haben bereits die Lösung $x = 200$. Zur Interpretation müssen wir noch wissen, dass x die Minuten waren, die Klaus telefoniert.

Antwort: Klaus kann 200 Minuten telefonieren bis sein Guthaben aufgebraucht ist.

3.2.3. Schnittpunkt zweier Geraden berechnen

Der Schnittpunkt zweier Geraden ist der Punkt, an dem sich zwei Geraden schneiden.



Wenn wir uns diesen Schnittpunkt genauer anschauen, fällt uns auf, dass sowohl der gestrichelte Graph als auch der durchgezogene Graph beim Schnittpunkt den gleichen x- und y-Wert haben. Dieses ist der Ansatz, den wir zur Berechnung des Schnittpunktes brauchen.

Beispiel:
Simon möchte ein neues Handy haben und muss dafür einen neuen Vertrag abschließen. Er ist sich nicht sicher, ob ein Prepaid-Vertrag (0,00 € Grundgebühr und 0,20 € pro Minute) oder ein Vertrag mit Grundgebühr (10,00 € Grundgebühr und 0,10 € pro Minute) das bessere Angebot ist. Die Entscheidung würde ihm leichter fallen, wenn er wüsste, nach wie vielen Minuten die Kosten gleich hoch sind.

Es müssen zunächst zwei Gleichungen aufgestellt werden. Die erste für den Prepaidvertrag P.

$P(x)=0{,}2\,x$	Es gibt keine Grundgebühr und somit kein Absolutglied.

Eine weitere für den Vertrag mit Grundgebühr G.

$G(x)=0{,}1\,x+20$	Simon muss 20 € Grundgebühr zahlen. Die fallen also immer an. Daher hat das Absolutglied einen Wert von 20.

Nun soll herausgefunden werden, wann beide gleich teuer sind. Dafür setzen wir die beiden Funktionsterme gleich. Dieses ist möglich, da beim Schnittpunkt der Gleiche f(x)-wert rauskommt.

$0{,}2\,x=0{,}1\,x+20$	|-0,1x	Dieses mache ich damit ich die x-Werte auf eine Seite des Gleichheitszeichens bekomme.
$0{,}1\,x=20$	|*10 oder :0,1	Hiermit erreiche ich das ich 1x habe.
$x=200$		Das Ergebnis lautet x=200. Für die Interpretatation des Ergebnisses muss ich wissen, dass x für die Minuten steht.

Die beiden Verträge sind gleich teuer, wenn Simon 200 Minuten telefoniert.

Ich kann jetzt noch berechnen, wie teuer die beiden Verträge sind. Dafür setze ich die 200 in eine der beiden Funktionsgleichungen ein.

$P(x)=0{,}2\,x$	oder	$G(x)=0{,}1\,x+20$
$P(200)=0{,}2\cdot 200=40$		$G(200)=0{,}1\cdot 200+20=20+20=40$

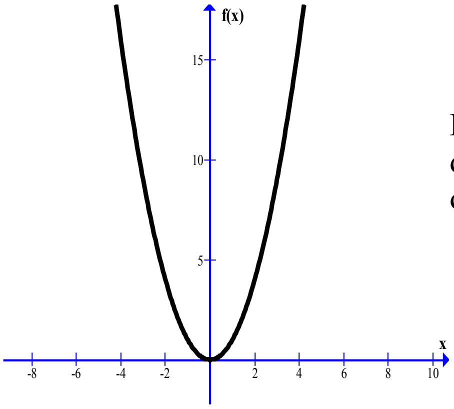
Antwort: Die beiden Verträge kosten beide 40,00 €, wenn Simon jeweils 200 Minuten telefoniert.

Stellen Sie eine Wertetabelle für beide Funktionsgleichungen auf um die beiden Graphen zu zeichnen.

Hinweis: Eine Lösung ist nicht mit angefügt, da Sie die x-Werte beliebig wählen können. Des Weiteren ist die grafische Lösung auf der vorherigen Seite zu sehen.

3.3. quadratische Funktionen

Die quadratischen Funktionen haben noch ein quadratisches Glied. Die einfachste quadratische Funktionsgleichung ist $f(x)=x^2$. Der Graph dieser Funktionsgleichung heißt *Normalparabel* und hat folgendes Aussehen:



Die Normalparabel hat ihren Scheitelpunkt (in diesem Fall ist es der tiefste Punkt der Parabel) im Ursprung. Die Parabel ist nach oben geöffnet.

Die quadratische Funktion kann durch ein lineares und ein absolutes Glied ergänzt werden. Die allgemeine Schreibweise hierfür lautet:

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{quadratisches-}} \underbrace{+\ bx}_{\text{lineares-}} \underbrace{+\ c}_{\text{absolutes Glied}}$$

Die Parameter a , b und c haben unterschiedliche Auswirkungen auf das Aussehen der Parabel (dem Graphen einer quadratischen Funktion). Hierauf werde ich nicht weiter eingehen, da wir dieses gemeinsam im Unterricht untersuchen werden.

4 Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 1:

a) $\mathbb{Z}$ b) $\mathbb{Q}$ c) $\mathbb{N}^*$ d) $\mathbb{N}$ e) $\mathbb{R}$

Aufgabe 2:

a) $7^2+5=49+5=54$ b) $7+5\cdot3=7+15=22$ c) $(5+1)\cdot2=6\cdot2=12$

d) $(7+6)\cdot2^2=13\cdot4=52$ e) $(5\cdot(8-3))-6=(5\cdot5)-6=25-6=19$

Aufgabe 3:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{16}{10}-\frac{15}{10}=\frac{1}{10}$ c) $\frac{36}{8}+\frac{7}{8}=\frac{43}{8}$ d) $\frac{45}{22}=2\frac{1}{22}$ e) $\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$

f) $(\frac{1}{4})\cdot(\frac{6}{9})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ g) $\frac{9}{8}-(\frac{7}{10})\cdot(\frac{4}{3})=\frac{9}{8}-\frac{28}{30}=\frac{9}{8}-\frac{14}{15}=\frac{135}{120}-\frac{112}{120}=\frac{23}{120}$

Aufgabe 4:

a) $0=-2x^2-12x+12$ oder $2x^2+12x-12=0$

b) $0=-8x^2+6x-45$ oder $8x^2-6x+45=0$

c) $0=-7x^3-x^2+14x-47$ oder $7x^3+x^2-14x+47=0$

Aufgabe 5:

a) erste binomische Formel b) zweite binomische Formel c) dritte binomische Formel

d) dritte binomische Formel e) erste binomische Formel f) zweite binomische Formel

g) erste binomische Formel h) dritte binomische Formel i) zweite binomische Formel

j) dritte binomische Formel k) zweite binomische Formel l) erste binomische Formel

Aufgabe 6:

a) $4x^2+20xy+25y^2$ b) $49m^2+42mn+9n^2$ c) $81a^2-126ab+49b^2$

b) $25h^2-9i^2$ e) $4k^2-16kr+16r^2$ f) $1a^2-49b^2$

Aufgabe 7:

a) $(7a+3b)^2$ b) $(4x+2y)(4x-2y)$ c) $(1u+5v)^2$

d) $(6m-8n)^2$ e) $(9f+10g)(9f-10g)$ f) $(12h-2i)^2$